

# Что делать с прерывистым спросом: современный взгляд на проблему

Иван Светушков,  
Лектор университета Ланкастера, Великобритания

30 сентября 2020



ПРОГНОЗИРОВАНИЕ  
И ПЛАНИРОВАНИЕ  
2020

Marketing Analytics  
and Forecasting



Lancaster University  
Management School



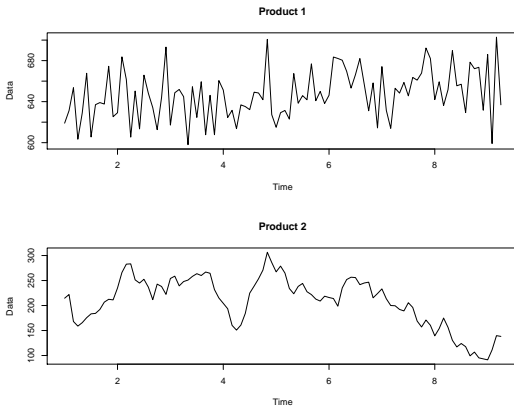
# Введение в прерывистый спрос



Взято с сайта <https://www.drivenn.ru/journal/novosti/kakaya-raznitsa-mezhdu-korotkoy-i-dlinnoy-preryvistymi-liniyami-id27445>

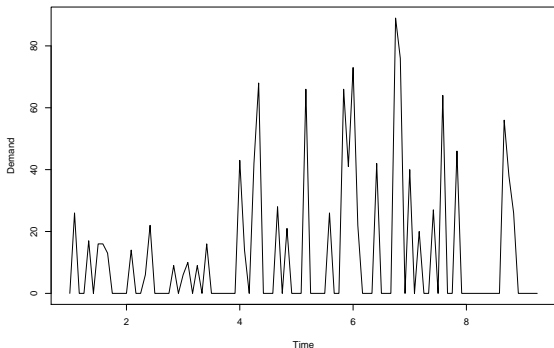
# Введение

Стандартный спрос выглядит следующим образом:



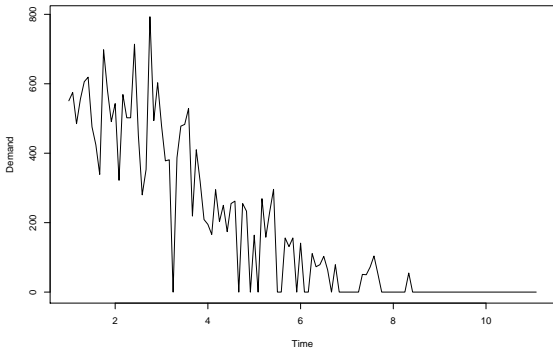
# Введение

Но, что если товар покупают не каждый день / неделю / месяц / ...?



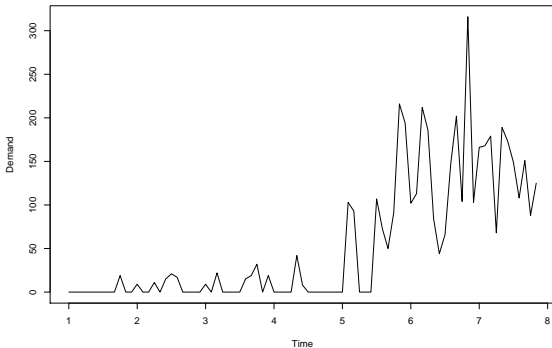
# Введение

Или же спрос может затухать...



# Введение

Или наоборот находиться на начальных стадиях роста...



# Введение

**Прерывистый спрос** – это такой спрос на продукцию, который происходит нерегулярно.

Примеры продуктов с прерывистым спросом:

- Уникальные дорогие продукты (детали самолётов);
- Уникальные престижные продукты (зелёная губная помада);
- Любой продукт, продажи которого измерены на высокой частоте (час / минута / ...).

# Введение

Прежде чем перейти к прерывистому спросу, разберёмся в том, что такое “экспоненциальное сглаживание”.

Простое экспоненциальное сглаживание (метода Брауна) было предложено Робертом Брауном (Brown, 1956) и независимо от него в 1957 Чарльзом Хольтом (Holt, 2004):

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1 - \alpha)\hat{y}_t, \quad (1)$$

где  $y_t$  – фактическое,  $\hat{y}_t$  – прогнозное значения, а  $\alpha$  – это постоянная сглаживания.



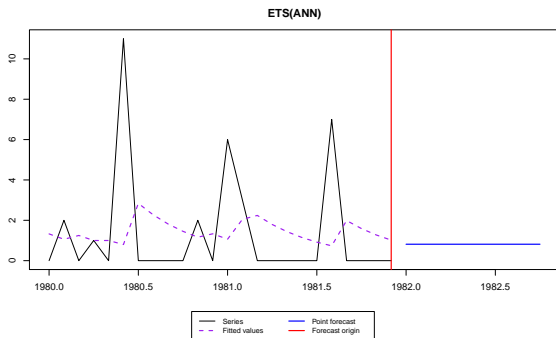
# Классические методы



Картинка взята отсюда: <https://www.searchenginejournal.com/successful-seo/279991/>

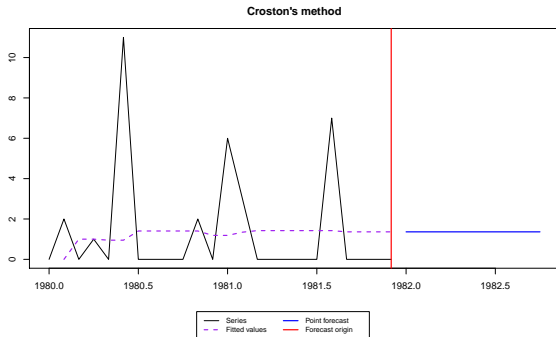
# Метод Кростона

Croston (1972) обратил внимание на то, что метод Брауна в случае с прерывистым спросом даёт смещённые прогнозы.



# Метод Кростона

Croston (1972) предложил разбивать прерывистый спрос на две части: размер спроса и интервалы спроса. Он использовал метод Брауна для каждой из частей.



## Метод Кростона

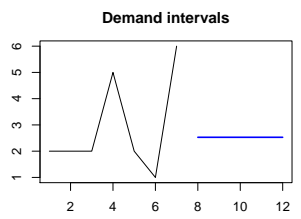
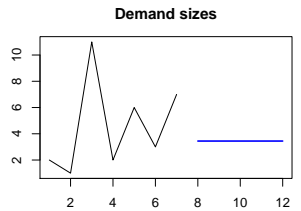
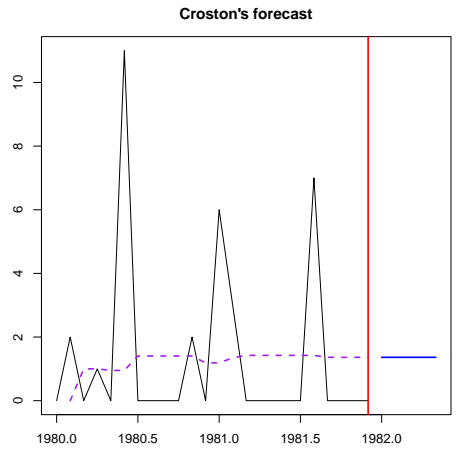
Метод Кростона математически выглядит так:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{jt} &= \frac{1}{\hat{q}_{jt}} \hat{z}_{jt} \\ \hat{z}_{jt} &= \alpha_z z_{jt-1} + (1 - \alpha_z) \hat{z}_{jt-1} \\ \hat{q}_{jt} &= \alpha_q q_{jt-1} + (1 - \alpha_q) \hat{q}_{jt-1}, \\ \hat{y}_t &= \hat{y}_{jt} \\ j_t &= j_{t-1} + o_t\end{aligned}\tag{2}$$

где  $q_{jt}$  – это интервалы спроса,  $z_{jt}$  – размер спроса,

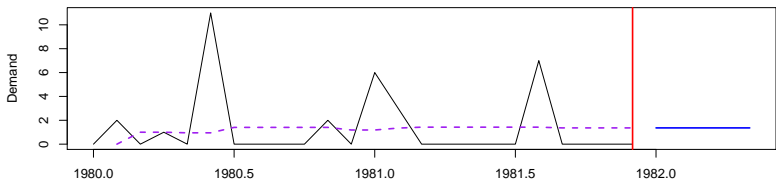
$\alpha_z$  и  $\alpha_q$  – постоянные сглаживания,  $o_t$  – бинарная переменная появления спроса.

# Метод Кростона

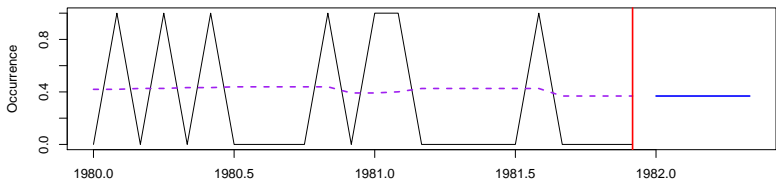


# Метод Кростона

Croston's forecast



Croston's probability



# Метод Кростона

Преимущества метода:

- Решает проблему смещения;
- Лёгок в применении;
- Лёгок в понимании.

Недостатки:

- Размеры и интервалы спроса обновляются только при появлении спроса;
- Нет прогнозных интервалов;
- Нет полноценного метода для оценки параметров.

## Syntetos-Boylan Approximation (SBA)

Метод Кростона был забыт до тех пор, пока Johnston et al. (1999) не показали, что он хорошо работает на практике.

Syntetos and Boylan (2001) показали, что сам метод даёт смещённые прогнозы, так как математическое ожидание:

$$E\left(\frac{1}{q_{jt}}\right) \neq \frac{1}{E(q_{jt})} \quad (3)$$

Они предложили исправить это смещение (Syntetos and Boylan, 2001, 2005).



## Syntetos-Boylan Approximation

Предложенная формула (Syntetos and Boylan, 2005):

$$\hat{y}_{jt} = \left(1 - \frac{\alpha_z}{2}\right) \frac{1}{\hat{q}_{jt}} \hat{z}_{jt} \quad (4)$$

Это приближительное решение, так как  $E\left(\frac{1}{q_{jt}}\right)$  не имеет простой математической формы.

Метод работает хорошо на данных с большим количеством нулей.

Он не нужен на данных с маленьким количеством.

# Syntetos-Boylan Approximation

Преимущества:

- Решает проблему смещения в методе Кростона;
- Легко использовать.

Недостатки:

- Не работает в случае со спросом, близким к непрерывному;
- Как понять, имеем мы дело с прерывистым спросом или нет?

## Категоризация данных

Сколько процентов это прерывистый спрос?

30%?



3



Just set a threshold like 30% and if the number of "zeroes" exceeds this threshold then declare it to be an intermittent demand series. For guidelines to deal with "unusual demands" rather than believing them and Level Shifts ( n.b. A level Shift is not a time trend ) . Also since intermittent demand can yield rates that are auto-regressive ( i.e autocorrelated ) models like the Poisson Model or the Croston approach are of limited value. Please see the discussion Please see my comments in [How to forecast based on aggregated data over irregular intervals?](#) regarding this.

share cite edit flag

edited Apr 13 '17 at 12:44



Community ♦

1

answered Mar 8 '12 at 21:26



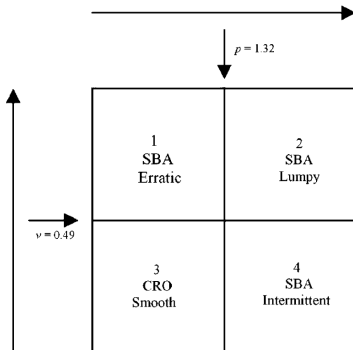
IrishStat

22.2k 4 23 44

Почему 30%? Почему не 10%?

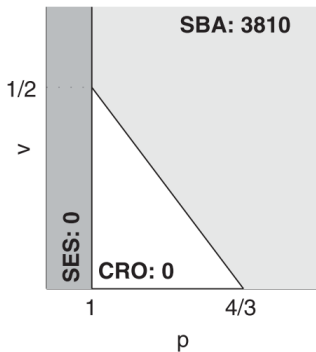
# Категоризация данных

Syntetos et al. (2005) предложили схему для категоризации данных (SBC):



## Категоризация данных

Kostenko and Hyndman (2006) предложил альтернативный подход, доработанный Petropoulos and Kourentzes (2015):



## Категоризация данных

Фактически, подходы подразумевают, что наличие хотя бы одного нуля – это уже прерывистый спрос.

Преимущества:

- Дают правила для выбора прогнозных методов...;
- ...простые правила.

Недостатки:

- Какой именно подход использовать?
- Применимы ли они ко всем видам данных?..
- Подходы предполагают, что вероятность спроса постоянна;
- И что вариация в данных постоянна.

# Современные методы



Картинка взята с сайта <https://www.dailymail.co.uk/news/article-2781612/Media-duped-fake-article-artist-creates-invisible-paintings-fetch-millions.html>

## Метод TSB

Teunter et al. (2011) предложили альтернативный метод для прерывистого спроса:

$$\begin{aligned} \hat{y}_t &= \hat{p}_t \hat{z}_t \\ \hat{z}_{j_t} &= \alpha_z z_{j_t-1} + (1 - \alpha_z) \hat{z}_{j_t-1} \\ \hat{p}_t &= \alpha_p o_{t-1} + (1 - \alpha_p) \hat{p}_{t-1} \\ \hat{z}_t &= \hat{z}_{j_t} \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\hat{p}_t$  – это вероятность возникновения спроса.

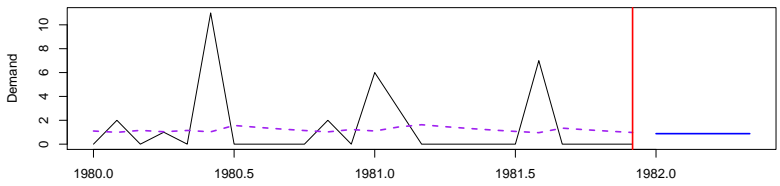
Обновление вероятности происходит на каждом наблюдении.

Метод мотивирован идеей затухающего спроса, но не совсем доведён до конца.

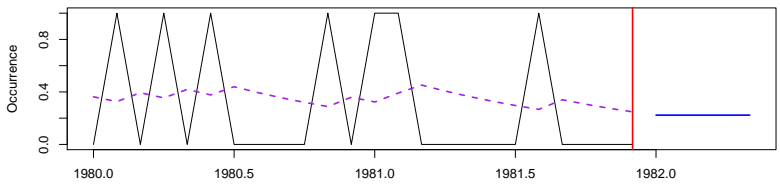


# Метод TSB

TSB forecast



TSB probability



# Метод TSB

## Преимущества:

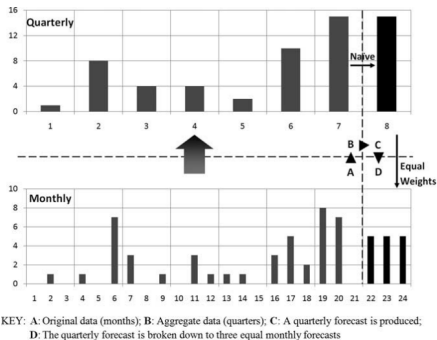
- Вероятность обновляется на каждом наблюдении;
- Лёгок в применении;
- Лёгок в понимании.

## Недостатки:

- Нет прогнозных интервалов, нет метода выбора моделей;
- Тяжело добавлять дополнительные компоненты;
- Нет тренда.

# ADIDA

Nikolopoulos et al. (2011) предложили Aggregate-Disaggregate Intermittent Demand Approach (ADIDA) - подход по агрегированию и дезагрегированию прерывистого спроса.



# ADIDA

## Преимущества:

- Можно использовать любую модель;
- Агрегирование может быть согласовано с временем на выполнение заказа (lead time);

## Недостатки:

- Не всегда ясно, до какого уровня агрегировать данные;
- Как дезагрегировать прогнозы?
- Что насчёт трендов?

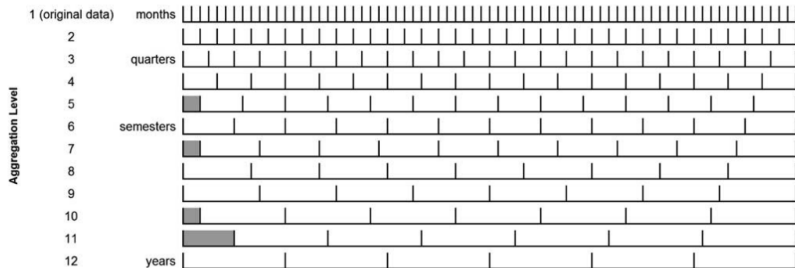
# iMAPA

Метод, похожий на ADIDA был предложен Petropoulos and Kourentzes (2015).

Идея в том, чтобы дать прогнозы на разных уровнях агрегации:

- Месячные данные;
- Дву-месячные;
- Квартальные;
- ...

## iMAPA



**Figure 1** Temporal non-overlapping aggregation for multiple levels.

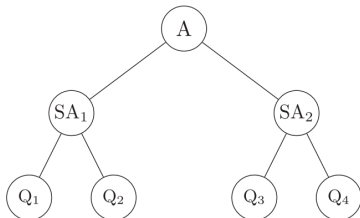
*Note:* The grey areas highlight observations that are not used, in order to have complete aggregation buckets.

Прогнозы можно строить с помощью чего угодно.

После этого прогнозы комбинируются.

## Временные иерархии

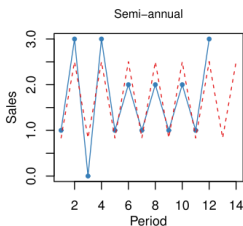
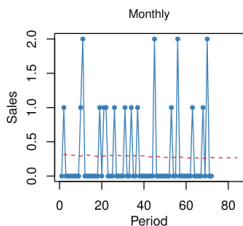
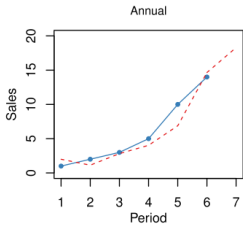
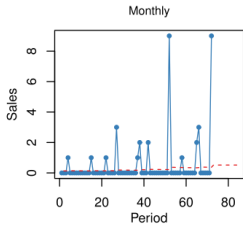
Kourentzes and Athanasopoulos (2021) - идея, похожая на iMAPA, но использующая иерархический подход.



**Fig. 1.** A temporal hierarchy for quarterly data.  $Q_\ell$  with  $\ell = 1, \dots, 4$ , denote quarters,  $SA_\ell$  with  $\ell = 1, 2$ , semi-annual observations, and  $A$  the annual observation.

Позволяет включать сезонность и тренды.

# Временные иерархии, пример





# iMARA и иерархии

Преимущества:

- Прогнозы на разных временных уровнях;
- Прогнозы согласованы;
- Любая модель для прогнозирования.

Недостатки:

- Нет прогнозных интервалов;
- Сложности на малых выборках (прогноз по двум точкам?);
- Больше расчётов (модель на каждом уровне).

## iETS – прерывистая модель экспоненциального сглаживания

На основе идеи Croston (1972), Svetunkov and Boylan (2019) предложили модель:

$$\begin{aligned}y_t &= o_t z_t \\z_t &\text{ – чистая мультипликативная модель ETS.} \\o_t &\sim \text{Bernoulli}(p_t)\end{aligned}\tag{6}$$

Это уже полноценная статистическая модель.

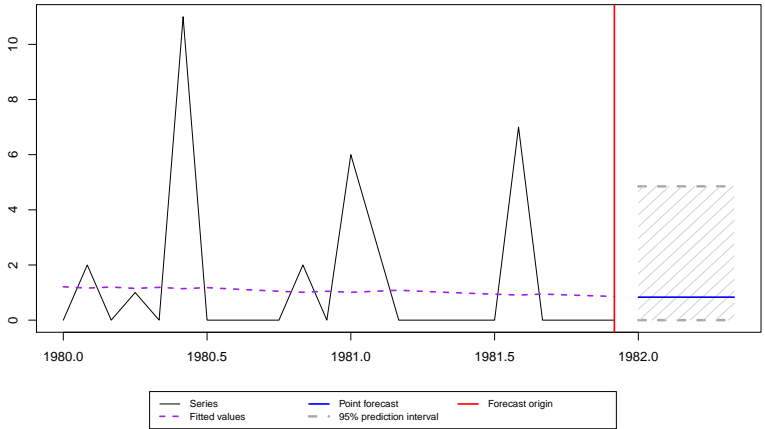
Кростон и TSB могут считаться методами оценки модели iETS.

Пример одной из моделей  $iETS(M,N,N)_O(M,N,N)$ :

$$\begin{cases}
 y_t = o_t z_t \\
 \begin{cases}
 z_t = l_{z,t-1} (1 + \epsilon_t) \\
 l_{z,t} = l_{z,t-1} (1 + \alpha \epsilon_t) \\
 (1 + \epsilon_t) \sim \log \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)
 \end{cases} \\
 \begin{cases}
 o_t \sim \text{Bernoulli}(p_t) \\
 p_t = \frac{a_t}{a_t + 1} \\
 a_t = l_{a,t-1} (1 + \epsilon_{a,t}) \\
 l_{a,t} = l_{a,t-1} (1 + \alpha_a \epsilon_{a,t}) \\
 (1 + \epsilon_{a,t}) \sim \log \mathcal{N}(0, \sigma_a^2)
 \end{cases}
 \end{cases} . \quad (7)$$

# iETS

iETS(MNN)[G](MNN)



# iETS

## Преимущества:

- Любая модель ETS для размеров спроса;
- Любая модель ETS для вероятности появления спроса;
- Объясняющие переменные;
- Автоматический выбор модели для обеих частей;
- Прогнозные интервалы;
- Расширяема для других моделей (ARIMA, регрессия).

## Недостатки:

- Сложная модель;
- Тяжело оценивать на малых выборках;

## Современные методы

Другие методы прогнозирования прерывистого спроса:

- INARMA – Integer ARMA – целочисленная ARMA (Mohammadipour and Boylan, 2012);
- Нейронные сети (Kourentzes, 2013);
- Пуассоновское и отрицательное биномиальное распределения (Snyder et al., 2012);
- GLM для временных рядов (Liboschik et al., 2017);
- Нейронные сети “Долгая краткосрочная память” (Turkmen et al., 2019).

# Оценка точности прогнозов прерывистого спроса



Картинка взята с

<https://dearauthor.com/features/letters-of-opinion/gauging-other-romance-readers/>

## Оценка точности

Можно ли использовать Mean Absolute Percentage Error (MAPE)?

$$\text{MAPE} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h \frac{|y_{t+j} - \hat{y}_{t+j}|}{y_{t+j}} \quad (8)$$

Нет, потому что мы имеем дело с нулями.

Никакая ошибка на основе процентов не подходит.



## Оценка точности

Как насчёт MAE (средняя абсолютная ошибка)?

Минимум MAE соответствует медиане (Kolassa, 2016).

Прерывистый спрос может с лёгкостью содержать больше 50% нулей.

Лучший прогноз в таком случае (по MAE) – нулевой.

Нельзя использовать ошибки на основе MAE (MASE, sMAE и т.д.).

## Оценка точности

Ошибки на основе MSE минимизируются средней величиной.

В случае с прерывистым спросом они имеют смысл.

Например, rRMSE (Davydenko and Fildes, 2013):

$$\text{rRMSE} = \frac{\text{RMSE}_a}{\text{RMSE}_b}, \quad (9)$$

где

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{h} \sum_{j=1}^h (y_{t+j} - \hat{y}_{t+j})^2} \quad (10)$$

## Оценка точности

Любая ошибка на основе MSE будет иметь смысл.

Выбор ошибки должен быть продиктован конкретной проблемой.

Если возможно, анализируйте распределение ошибок.

Не забывайте про прогнозные интервалы.

# Вместо заключения



Картинка взята с <https://www.amazon.com/End-Near-Funny-Doomsday-Cartoon/dp/B00K6LBMG0>

## Вместо заключения

- Прерывистый спрос – сложная проблема;
- Мы с ней будем сталкиваться всё чаще и чаще;
- Существуют классические методы прогнозирования;
- Но наука не стоит на месте, появляются и более современные;
- Какие бы методы вы не использовали, надо уметь их сравнивать;
- ...



## Вместо заключения

- Прерывистый спрос – сложная проблема;
- Мы с ней будем сталкиваться всё чаще и чаще;
- Существуют классические методы прогнозирования;
- Но наука не стоит на месте, появляются и более современные;
- Какие бы методы вы не использовали, надо уметь их сравнивать;
- ...
- Прежде чем прогнозировать, надо понять, как принимаются решения на практике.



## Вместо заключения

Некоторые материалы по теме:

- О модели iETS в пакете “smooth” для R:  
<https://tinyurl.com/y5453ckn>;
- Как измерить точность прогнозов:  
<https://tinyurl.com/y2g4fw2y>;
- Как оценить адекватность прогнозных интервалов:  
<https://tinyurl.com/y6kl6fem>;
- Как измерить точность в случае с прерывистым спросом  
<https://tinyurl.com/yxatxqgn>.



# Спасибо за внимание!

ИВАН СВЕТУНЬКОВ

[i.svetunkov@lancaster.ac.uk](mailto:i.svetunkov@lancaster.ac.uk)

<https://forecasting.svetunkov.ru>

twitter: @iSvetunkov

Marketing Analytics  
and Forecasting



Lancaster University

Management School



## Список литературы I

Brown, R. G., 1956. Exponential Smoothing for predicting demand.

Croston, J. D., sep 1972. Forecasting and Stock Control for Intermittent Demands. Operational Research Quarterly (1970-1977) 23 (3), 289.

URL

<http://www.jstor.org/stable/3007885?origin=crossref>



## Список литературы II

Davydenko, A., Fildes, R., 2013. Measuring Forecasting Accuracy: The Case Of Judgmental Adjustments To SKU-Level Demand Forecasts. International Journal of Forecasting 29 (3), 510–522.

URL

<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijforecast.2012.09.002>

Holt, C. C., 2004. Forecasting seasonals and trends by exponentially weighted moving averages. International Journal of Forecasting 20 (1), 5–10.



## Список литературы III

Johnston, F. R., Boylan, J. E., Meadows, M., Shale, E., dec 1999. Some Properties of a Simple Moving Average when Applied to Forecasting a Time Series. The Journal of the Operational Research Society 50 (12), 1267–1271.

URL <http://wrap.warwick.ac.uk/13847/http://www.jstor.org/stable/3010636?origin=crossref>

Kolassa, S., 2016. Evaluating predictive count data distributions in retail sales forecasting. International Journal of Forecasting 32 (3), 788–803.

URL

<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijforecast.2015.12.004>



## Список литературы IV

Kostenko, A. V., Hyndman, R. J., oct 2006. A note on the categorization of demand patterns. *Journal of the Operational Research Society* 57 (10), 1256–1257.

URL <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1057/palgrave.jors.2602211>

Kourentzes, N., 2013. Intermittent demand forecasts with neural networks. *International Journal of Production Economics* 143 (1), 198–206.

URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijpe.2013.01.009>

Kourentzes, N., Athanasopoulos, G., 2021. Elucidate structure in intermittent demand series. *European Journal of Operational Research* 288 (1), 141–152.

URL <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.05.046>



## Список литературы V

Liboschik, T., Fokianos, K., Fried, R., 2017. tscount : An R Package for Analysis of Count Time Series Following Generalized Linear Models. Journal of Statistical Software 82 (5).

URL <http://www.jstatsoft.org/v82/i05/>

Mohammadipour, M., Boylan, J. E., 2012. Forecast horizon aggregation in integer autoregressive moving average (INARMA) models. Omega 40 (6), 703–712.

URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.omega.2011.08.008>



## Список литературы VI

Nikolopoulos, K., Syntetos, A. A., Boylan, J. E., Petropoulos, F., Assimakopoulos, V., mar 2011. An aggregate–disaggregate intermittent demand approach (ADIDA) to forecasting: an empirical proposition and analysis. *Journal of the Operational Research Society* 62 (3), 544–554.

URL <http://link.springer.com/10.1057/jors.2010.32>

Petropoulos, F., Kourentzes, N., jun 2015. Forecast combinations for intermittent demand. *Journal of the Operational Research Society* 66 (6), 914–924.



## Список литературы VII

Snyder, R. D., Ord, J. K., Beaumont, A., apr 2012. Forecasting the intermittent demand for slow-moving inventories: A modelling approach. International Journal of Forecasting 28 (2), 485–496.

URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijforecast.2011.03.009>  
<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0169207011000781>

Svetunkov, I., Boylan, J. E., 2019. Multiplicative State-Space Models for Intermittent Time Series.



## Список литературы VIII

Syntetos, A. A., Boylan, J. E., may 2001. On the bias of intermittent demand estimates. International Journal of Production Economics 71 (1-3), 457–466.

URL

<http://content.apa.org/journals/bul/71/2/108>  
<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0925527300001432>

Syntetos, A. A., Boylan, J. E., apr 2005. The accuracy of intermittent demand estimates. International Journal of Forecasting 21 (2), 303–314.

URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0925527310002306>  
<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0169207004000792>





## Список литературы IX

- Syntetos, A. A., Boylan, J. E., Croston, J. D., 2005. On the categorization of demand patterns. *Journal of the Operational Research Society* 56 (5), 495–503.
- Teunter, R. H., Syntetos, A. A., Babai, M. Z., nov 2011. Intermittent demand: Linking forecasting to inventory obsolescence. *European Journal of Operational Research* 214 (3), 606–615.  
URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377221711004437>
- Turkmen, A. C., Wang, Y., Januschowski, T., 2019. Intermittent Demand Forecasting with Deep Renewal Processes.  
URL <http://arxiv.org/abs/1911.10416>

